Análisis Numérico I/~~Modelación Numérica~~/Métodos Matemáticos y Numéricos			Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.	
2º Cuatrimestre 2019	Cursos: 4/2/6 (Schwarz-Sosa)	Parcial. 1º Oportunidad	Tema 2 (17)	Nota
Padrón: 101166	Apellido y Nombres: MILANOWSKI, MAIA SOFIA			7 (siete)

Ejercicio 1. Con los datos de la tabla se ha construido:

- Interpolaciones por Spline y Hermite-Newton tomando puntos desde X0 en adelante, **pero sin incluir a X1**.
- Ajuste por Cuadrados Mínimos tomando puntos desde X0 en adelante.
- Interpolación por Lagrange Baricéntrico según se indica.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	x_0	**2.5**	x_2	**5**	x_4	x_5
y_i	y_0	y_1	**5**	y_3	**10**	**12**

CM SPLINE

$$A1=\begin{vmatrix}5 & nd & nd\\ 18.5 & nd & nd\\ nd & nd & nd\end{vmatrix}\quad B1=\begin{vmatrix}28\\ nd\\ nd\end{vmatrix}\quad A2=\begin{vmatrix}nd & nd & 0 & 0\\ nd & nd & nd & 0\\ 0 & nd & nd & nd\\ 0 & 0 & nd & nd\end{vmatrix}$$

$$S_0(x_1)=\mathbf{2.6501652644}\quad w_1^{1,3,4,5}=\mathbf{-0.0161616162}\quad LB(x_1)=3\quad C_1=\mathbf{1.18269231}\quad B_0=1\ \ D_0=\mathbf{0.15564904}$$

$$P(x)=2+1.(x-0)+nd.(x-0)^2+nd.(x-0)^2.(x-x_2)+nd.(x-0)^2.(x-x_2).(x-x_3)$$

1. Indicar para cada interpolación qué puntos se usaron, el grado y la cantidad de polinomios resultantes.
2. A partir de la información de Hermite-Newton, obtener toda la información disponible para $i=0$
3. A partir de la información de Spline, obtener el coeficiente C_0 correspondiente al polinomio $S_0(x)$
4. Con la información de Spline, Newton y la obtenida al momento, obtenga una ENOL para hallar h_0 de Spline
5. Resuelva la ENOL con un método de orden $1<\alpha<2$ eligiendo un intervalo y criterio de corte apropiados.
6. Con la información de Cuadrados Mínimos, Lagrange Baricéntrico y la obtenida al momento, obtenga el resto de los x_i e y_i.
7. Indicar qué grado máximo de polinomio de Hermite-Newton podría obtenerse si se conocieran todos los datos ocultos en el ejercicio.

Ejercicio 2. Dada la matriz $A(x,y)$ que se muestra a continuación, se pide:

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & y\\ 0 & y^{-1} & 0\\ y & 0 & x\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}1\\ 2\\ 3\end{vmatrix}$$

1. Sabiendo que $x>>y>1$ y que $\|A^{-1}\|=y$, obtener $k(A)$ como función de las variables x,y
2. Construyendo la gráfica de proceso para $kA(x,y)$, obtener las expresiones de Cp y Te ¿Qué puede decir sobre la condición del problema? ¿Y sobre la estabilidad del algoritmo?
3. Realice 3 iteraciones por el método de Gauss-Seidel para resolver el SEL $A.x=B$
4. Indicar para qué criterio de corte y para qué tolerancia adoptaría la tercer iteración realizada como solución del SEL
5. ¿Es esperable la convergencia de Gauss-Seidel para esta matriz A? ¿Y para el método de Jacobi?

Ejercicio 3. Indicar a qué método corresponde el siguiente bloque de Python y detectar cuáles son los 3 errores que impedirían que el mismo llegue a un resultado correcto:

```
In [1]:   for i in range (0,n):
              X1[i] = B[i]
              for k in range(0,i):
                  X1[i] -= A[i,k]+X1[k]
              for k in range(i+1,n):
                  X1[i] -= A[i,k]*X0[k]
              X1[i] /= A[i,i]
              X1[i] *= w
              X1[i] += w*X0[i]
```

Milanowski, Maria Sofia
101166

EJERCICIO 1:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	? 0	2,5	? 3,75	5	? 7,25	? 7,71
y_i	? 0	?	5	? 4,29	10	12
y'_i	1					

$P(x) = 2 + 1(x-0) + nd\,(x-0)^2 + nd\,(x-0)^2(x-x_2) + nd\,(x-0)^2(x-x_2)(x-x_3)$

1a) Para spline se utilizaron 4 puntos, 3 polinomios de grado 3. (trazadores cúbicos)
Para Newton-Hermite, 4 puntos, 1 polinomio de grado 4
Para Cuadrados mínimos se usaron 5 puntos, 1 polinomio de grado 2
Para Lagrange baricéntrico 4 puntos, grado 3, 1 polinomio.

2) El polinomio de Newton tiene la siguiente forma:

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$.

$a_0 = \boxed{y_0 = 2}$

$(x - x_0) = (x-0) \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$

Como hermite usa la derivada:

$a_1 = F_{00} = \boxed{y'_0 = 1}$

a_0 — y_0; a_1 — y'_0; a_2; a_3; a_4

$y_0 > F_{00}$
$y_0 > F_{01}$; $F_{00}, F_{01} > F_{001}$
$y_1 > F_{12}$; $F_{01}, F_{12} > F_{012}$; $F_{001}, F_{012} > F_{0012}$
$y_2 > F_{23}$; $F_{12}, F_{23} > F_{123}$; $F_{012}, F_{123} > F_{0123}$; $F_{0012}, F_{0123} > F_{00123}$
y_3

3) El polinomio de spline tiene la forma:

$S_0(x_i) = a_0 + b_0 x_i + c_0 x_i^2 + d_0 x_i^3$ (no incluye a x_1)

Frontera sujeta: $(B_0 \neq 0)$

$$\begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & h_2 & 2h_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow 3[F_{01} - y'_0] \\ \rightsquigarrow 3[F_{12} - F_{01}] \\ \rightsquigarrow 3[F_{23} - F_{12}] \\ \rightsquigarrow 3[y'_3 - F_{23}] \end{matrix}$$

Sabemos que $B_0 = 1 = 3[F_{01} - y'_0]$ es B_0 de spline

$F_{01} = \frac{1}{3} + y'_0$

(No usa x_1) $\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow x_2 = 5 \cdot \frac{3}{4} + x_0$

$\boxed{x_2 = 3{,}75}$

NOTA

Resolviendo la primera fila de la matriz

$$2h_0 \cdot C_0 + 2h_0 \cdot C_1 = B_0$$

$$2(x_2 - x_0) \cdot C_0 + (x_2 - x_0)\, C_1 = B_0$$

$$2(3{,}75 - 0) \cdot C_0 + (3{,}75 - 0) \cdot 1{,}18269231 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 = -0{,}4580128217}$$

¡ya está!

4) Planteamos una ENOL para hallar h_0 de spline:

$$2h_0\, C_0 + h_0 \cdot C_1 = 3\left[\frac{y_2 - y_0}{h_0} - y_0'\right]$$

$$\frac{h_0}{3}(2C_0 + C_1) + y_0' = \frac{y_2 - y_0}{h_0}$$

$$\frac{h_0^2}{3}(2C_0 + C_1) + y_0' h_0 + y_0 - y_2 = 0$$

Reemplazando con los valores obtenidos:

$$f(x) = \frac{h_0^2}{3} \cdot 9266666666 + h_0 - 5 = 0$$

5) Resolvemos mediante el método de la secante (convergencia supralineal)

$$p_{n+1} = p_n - f(p_n) \cdot \frac{(p_n - p_{n-1})}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

p_0
p_1
p_2

Elegimos un intervalo de $[\overset{a}{2{,}5} ; \overset{b}{4{,}5}]$ (ya sabemos que estará dentro del intervalo)

Como necesitamos dos puntos utilizamos un método de arranque: por ejemplo el de la bisección:

Evaluamos $f(x)$ en un extremo del intervalo y en un punto medio $p_0 = 3{,}5 = \frac{a+b}{2}$

$f(a) = f(2{,}5) = -1{,}944$
$f(p_0) = f(3{,}5) = -0{,}4111$

$f(a) \cdot f(p_0) > 0 \rightarrow$ el nuevo intervalo es $[p_0 ; b]$

tomo $p_1 = \frac{p_0 + b}{2} = 4.$

Ya tengo dos puntos: $p_0 = 3{,}5$ y $p_1 = 4$. Calculamos el siguiente con el método de la secante

$$p_2 = p_1 - f(p_1) \cdot \frac{(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} = 3{,}746666$$

$$p_3 = p_2 - f(p_2) \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{f(p_2) - f(p_1)} = 3{,}749956133$$

Milanowski, Maia Sofía
101166

HOJA N° 2/4

FECHA

$$p_4 = p_3 - \frac{F(p_3)(p_3 - p_2)}{F(p_3) - F(p_2)} = 3{,}750000008$$

$$e_r = \left| \frac{p_4 - p_3}{p_4} \right| = 1{,}17 \times 10^{-5} \leq TOL \rightarrow \text{fijaría la TOL en } 1.10^{-4}$$

Como conocemos el valor que debería dar ($h_0 = 3{,}75$) también podría ser apropiado calcular el error absoluto.

$$e = |\tilde{p} - p| = |\tilde{h}_0 - h_0| = |p_4 - 3{,}75| = 8.10^{-9} \leq TOL.$$ (en este caso fijaría una tolerancia de $1.10^{-5} \rightarrow$ 5 decimales)

6). De cuadrados mínimos:

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma x_i^0 & \Sigma x_i^1 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^1 & \vdots & \vdots \\ & & \end{bmatrix} \Rightarrow 5 = \text{cantidad de puntos utilizados (desde } x_0)$$

$$18{,}5 = \Sigma x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$18{,}5 = 0 + 2{,}5 + 3{,}75 + 5 + x_4$$

$$\Rightarrow \boxed{x_4 = 7{,}25}$$

de Lagrange baricéntrico:

$$w_1 = \frac{1}{(x_1 - x_3)} \cdot \frac{1}{(x_1 - x_4)} \cdot \frac{1}{(x_1 - x_5)} = -0{,}01616161 62 \Rightarrow x_5 = 7{,}710526303$$

Del dato $P_{LB}(x_1) = 3 \equiv y_3$ (¡es más sencillo!)

$$P_{LB}(x_1) = \frac{\frac{y_3 \cdot w_3}{x_1 - x_3} + \frac{y_4 \cdot w_4}{x_1 - x_4} + \frac{y_5 \cdot w_5}{x_1 - x_5}}{\frac{w_3}{x_1 - x_3} + \frac{w_4}{x_1 - x_4} + \frac{w_5}{x_1 - x_5}} = 3 \quad (1)$$

arrastre de datos

Calculo los w_i:

$$w_3 = \frac{1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{1}{x_3 - x_4} \cdot \frac{1}{x_3 - x_5} = 0{,}06707855282$$

$$w_4 = \frac{1}{x_4 - x_1} \cdot \frac{1}{x_4 - x_3} \cdot \frac{1}{x_4 - x_5} = -0{,}2031746086$$

$$w_5 = \frac{1}{x_5 - x_1} \cdot \frac{1}{x_5 - x_3} \cdot \frac{1}{x_5 - x_4} = 0{,}1537483065$$

Despejo y_3 de la ecuación (1):

$$\boxed{y_3 = 4{,}29025 1172}$$

NOTA

Con el ultimo dato de cuadrados minimos obtenemos y_1:

$$B = \begin{bmatrix} \Sigma y_i x_i^0 \\ \Sigma y_i x_i^1 \\ \Sigma y_i x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow 28 = \Sigma y_i = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$28 = 0 + y_1 + 5 + 4{,}29025 + 10$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = 8{,}70974882 8}$$

Los datos finales son:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	2,5	3,75	5	7,25	7,71
y_i	0	8,71	5	4,29	10	12
y'_i	1					

7) Si se conocieran todos los datos de las derivadas para el polinomio de Hermite, se dispondrían de $2(n+1)$ datos, por lo tanto el máximo grado podría ser $2n+1$. (En este caso 11)

NO SE CONOCEN TODAS LAS y'_i.

Milanowski, Maia Sofía
101166

Ejercicio 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$k_A = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$$

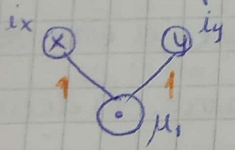
$$\|A\|_\infty = x$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = y$$

$$\boxed{k_A = x \cdot y}$$

mal!

Gráfica del proceso:



$$F_{amp}^{x} = \frac{d(x.y)}{dx} \cdot \frac{x}{x.y} = 1 = F_{amp}\, y$$

i_x y i_y = errores inherentes μ_1 = error de redondeo.

$$e = i_x \cdot 1 + i_y \cdot 1 + \mu_1$$

ρ = cota de los errores inherentes
μ = cota de los errores de redondeo

$$\underbrace{[|1| + |1|]}_{Cp}\,\rho + \underbrace{1}_{Te}\,\mu$$

Muy simple!

$Cp = 2$

$Te = 1$

Como Cp no es mucho mayor que 1, el problema está bien condicionado.

Como $Te = 1$, el algoritmo es estable, es decir que los errores de redondeo no se propagan exponencialmente.

Gauss Seidel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

tomo como valor semilla $X^{\langle 0 \rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1° iteración

$$x_1^{\langle 1 \rangle} = \frac{b_1 - (\cancel{a_{12} x_2^{\langle 0 \rangle}} + a_{13} x_3^{\langle 0 \rangle})}{a_{11}} = \frac{1 - (y.0)}{1} = 1$$

$$x_2^{\langle 1 \rangle} = \frac{b_2 - (\cancel{a_{21} x_1^{\langle 1 \rangle}} + \cancel{a_{23} x_3^{\langle 0 \rangle}})}{a_{22}} = \frac{2 - (0)}{y^{-1}} = 2y$$

$$x_3^{\langle 1 \rangle} = \frac{b_3 - (a_{31} x_1^{\langle 1 \rangle} + \cancel{a_{32} \cdot x_2^{\langle 1 \rangle}})}{a_{33}} = \frac{3 - y.1}{x} = \frac{3-y}{x}$$

2° iteración

$$x_1^{<2>} = \frac{b_1 - (a_{12} \cdot x_2^{<1>} + a_{13} \cdot x_3^{<1>})}{a_{11}} = \frac{1 - y \cdot \left(\frac{3-y}{x}\right)}{1} = 1 - \frac{3y - y^2}{x}$$

$$x_2^{<2>} = \frac{b_2 - (a_{21} \cdot x_1^{<2>} + a_{23} \cdot x_3^{<1>})}{a_{22}} = \frac{2 - (0)}{y^{-1}} = 2y$$

$$x_3^{<2>} = \frac{b_3 - (a_{31} \cdot x_1^{<2>} + a_{32} \cdot x_2^{<2>})}{a_{33}} = \frac{3 - y \cdot \left(1 - \frac{3y - y^2}{x}\right)}{x}$$

3° iteración

$$x_1^{<3>} = \frac{b_1 - (a_{12} \cdot x_2^{<2>} + a_{13} \cdot x_3^{<2>})}{a_{11}} = 1 - y \cdot \left(\frac{3 - y\left(1 - y\left(\frac{3-y}{x}\right)\right)}{x}\right)$$

$$x_2^{<3>} = \frac{b_2 - (a_{21} \cdot x_1^{<3>} + a_{23} \cdot x_3^{<2>})}{a_{22}} = \frac{2}{y^{-1}} = 2y$$

$$x_3^{<3>} = \frac{b_3 - (a_{31} \cdot x_1^{<3>} + a_{32} \cdot x_2^{<3>})}{a_{33}} = \frac{3 - y \cdot \left[1 - y\left(\frac{3 - y\left(1 - y\left(\frac{3-y}{x}\right)\right)}{x}\right)\right]}{x}$$

Criterio de corte: Realizaría las iteraciones hasta que el error relativo entre dos resultados consecutivos sea menor a una tolerancia. es decir:

$$\frac{\| x^{<i+1>} - x^{<i>} \|}{\| x^{<i+1>} \|} \leq TOL$$

La tolerancia la fijaría en 10^{-10} por ejemplo.

Para gauss seidel la convergencia es esperable si la matriz A es estrictamente diagonal dominante o definida positiva y simétrica.

A no es estrictamente diagonal dominante ya que en la fila 1, $a_{11} < a_{13}$ $(1 < y)$. Pero sí es simétrica y definida positiva (todos los subdeterminantes son >0). Puede esperarse que converja (lentamente).

Jacobi converge si es diagonal dominante, lo cual no se cumple. Por lo tanto no es esperable que converja

Milanowski, Maia Sofia
101166

Ejercicio 3:

```
1 for i in range (0,n):
2         x1[i] = B[i]
3         for k in range (0,i):
4                 x1[i] -= A[i,k] + x1[k]
5         for k in range (i+1, n):
6                 x1[i] -= A(i,k] * x0[k]
7         x1(i) /= A[i,i]
8         x1[i] *= w
9         x1[i] += w * x0[i]
```

Se trata del método de las relajaciones sucesivas (SOR)

Errores: Línea 1: for i in range (i, n)

Línea 4: $x_1[i] -= A[i,k] * x_1[k]$

~~Línea 9: $x_1[i] += w - x_0[i]$~~